Université Paris Dauphine
2022-2023

Introduction aux séries temporelles

Examen du 09/01/2023

Durée 2 heures - Documents et calculatrices non autorisés

Exercice 1 (Sur 8 points) Soit $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus stationnaire centré. Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ et $t \in \mathbb{Z}$, on pose $\sigma^2_{n,t} = \mathrm{Var}(X_t - \mathrm{proj}(X_t, H_{t-1,n}))$ où $H_{t-1,n} = \mathrm{Vect}(X_{t-k},\ k \in \{1,\dots,n\})$ et proj désigne la projection orthogonale dans L^2.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, il existe des réels $(\alpha_{n,k})_{k=1,\dots,n}$, *que l'on peut choisir indépendants de t,* tels que $\mathrm{proj}(X_t, H_{t-1,n}) = \sum_{k=1}^n \alpha_{n,k} X_{t-k}$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$.
2. En déduire que $\sigma^2_{n,t}$ ne dépend pas de t.
3. Montrer que la suite $(\sigma^2_{n,t})$ possède une limite, notée σ^2_∞, lorsque n tend vers $+\infty$.

   On dit que X est déterministe si

   $$X_t \in \overline{Vect\{X_s,\ s \leq t-1\}} \qquad \forall t \in \mathbb{Z},$$

   où l'adhérence est prise au sens L^2.

4. Montrer que X est déterministe, si et seulement si, $\sigma_\infty = 0$.
5. Dans cette question on suppose que X est un processus harmonique : il existe deux variables aléatoires A et B, indépendantes, de carré intégrables, centrées et de variance 1, et un réel $\theta \in]0,\pi[$ tels que $X_t = A\cos(\theta t) + B\sin(\theta t)$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. Montrer que X est déterministe.

Exercice 2 (Sur 12 points) Dans tout l'exercice, Z est un bruit blanc centré et de variance 1.

1. (Analyse d'un processus ARMA bien posé) On considère l'équation

   $$Y_t = \frac{5}{6}Y_{t-1} - \frac{1}{6}Y_{t-2} + Z_t, \qquad \forall t \in \mathbb{Z}.$$

   (a) Montrer que cette équation possède une unique solution stationnaire et que cette solution est causale.

   (b) Déterminer explicitement Y_t en fonction de $(Z_{t-k})_{k\in\mathbb{N}}$.

2. On considère maintenant l'équation

   $$X_t = -\frac{1}{6}(X_{t-1} - 4X_{t-2} + X_{t-3}) + Z_t, \qquad \forall t \in \mathbb{Z}.$$

   On veut montrer que cette équation ne possède pas de solution stationnaire. Pour cela on raisonne par l'absurde en supposant que cette équation possède une solution stationnaire X. Soit ν_X sa mesure spectrale.

(a) Posons $\Phi(z) = 1 + \frac{1}{6}(z - 4z^2 + z^3)$. Montrer que, pour toute fonction continue et $2\pi-$périodique $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on a

$$\int_0^{2\pi} f(u)\Big|\Phi(e^{iu})\Big|^2 \nu_X(du) = \int_0^{2\pi} f(u)\frac{1}{2\pi}du.$$

(b) (question plus délicate) Pour $\delta > 1$, on pose $f_\delta(u) = 1/(\delta + \cos(u))$. Montrer que la fonction $u \to f_\delta(u)\Big|\Phi(e^{iu})\Big|^2$ est bornée sur $[-1, 1]$ indépendamment de $\delta > 1$ et en déduire une contradiction.

3. Soit X le processus défini par récurrence par $X_{-1} = X_{-2} = X_{-3} = 0$ et

$$X_t = -\frac{1}{6}(X_{t-1} - 4X_{t-2} + X_{t-3}) + Z_t, \qquad \forall t \in \mathbb{N}.$$

(a) Vérifier que $\tilde{Y}_t$ défini par $\tilde{Y}_t := X_t + X_{t-1}$ pour tout $t \geq 0$ satisfait

$$\tilde{Y}_t = \frac{5}{6}\tilde{Y}_{t-1} - \frac{1}{6}\tilde{Y}_{t-2} + Z_t, \qquad \forall t \in \mathbb{N},$$

avec $\tilde{Y}_{-1} = \tilde{Y}_{-2} = 0$ et que

$$X_t = \sum_{k=0}^{t}(-1)^{t-k}\tilde{Y}_k \qquad \forall t \in \mathbb{N}.$$

(b) (question plus délicate) Soit (Y_t) le processus stationnaire défini à la question 1. Montrer que

$$\lim_{t\to+\infty} \|Y_t - \tilde{Y}_t\|_2 = 0.$$

(Indication : on pourra poser $W_t = Y_t - \tilde{Y}_t$ et trouver une relation matricielle entre (W_t, W_{t-1}) et (W_{t-1}, W_{t-2}).)